**В.И. Берник, О.Н. Пирютко**

Методические рекомендации для учителей

**Изучение темы «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»**

**1. Различные подходы к изложению элементов комбинаторикиучащимся учреждений общего среднего образования**

Необходимость рассмотрения различных содержательных, методических, технологическихподходов к изучению темы «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»связанапрежде всего с закономерностями формирования знаний. Первой и основнойметодической закономерностьюявляется организацияподвижности знаний, на основании которых формируются новые знания.Один из традиционных подходов к изучению правил комбинаторики – теоретико-множественный. В этом случае знания,на основании которых формируются новые знания, –это знаниеэлементов теории множеств. Для усвоения новой темыучащимисянеобходимызнания и уменияприменять следующиепонятия теории множеств: множество, элемент множества, подмножества, пересечение, объединение множеств, пустое множество, упорядоченные множества; свойства множеств.Такой подход осуществлялсяв школьном курсе математики в 1970-е годы, в период так называемойколмогоровской реформышкольной математики. Насегодняшний день в школьном курсе математикитеоретико-множественный подход отсутствует. Поэтому изучениеэлементовкомбинаторики требует иного подхода.

Проиллюстрируем возможности изучения этого нового раздела, заложенного в переходной программе Х классадля изучения математики на повышенном уровне. При этом укажем на взаимосвязь этих подходов, возможностиметодики и технологии реализации общих обучающихкомпонентовкак в теории, так и в практике решения задач. Выполним сравнительный анализ формирования теоретических знаний на примере изучения раздела «Перестановки без повторений».

**Перестановкибез повторений**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | Тридцать три буквы русского алфавита принято располагать в таком порядке: А, Б, В, Г, Д, Е, Ё, Ж, З, И, Й, К, Л, М, Н, О, П, Р, С, Т, У, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ъ, Ы, Ь, Э, Ю, Я.При этом порядке расположения букв, буква А является первой, Б – второй, В – третьей и т.д. вплоть до тридцать третьей буквы Я. Мы имеем дело с упорядоченным множеством.***Определение 1.* Множество** называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое натуральное число (номер элемента) от 1 до *n*, где *n* – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.Очевидно, что каждое множество, содержащее более одного элемента, можно упорядочить не единственным способом.***Определение 2.***Упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (то есть могут быть получены из того же самого множества), называются перестановками этого множества.Множество из одного элемента можно упорядочить одним способом: единственный элемент множества приходится считать первым. Возьмем множество из двух элементов, для примера: из двух букв А и Б. Очевидно, что их можно расположить по порядку двумя способами:АБ или БА.Три буквы А, Б, В можно расположить по порядку шестью способами:АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА.**Число перестановок из *n*-элементов обозначают .** Мы нашли, что Докажем, что вообще  (число перестановок из *n*-элементов) равно произведению первых *n*-натуральных чисел:Будем последовательно выбирать элементы данного множества и размещать их в определенном порядке на *n-*местах. На первое место можно поставить любой из *n-*элементов. После того как заполнится первое место, на второе место можно поставить любой из оставшихся  элементов. После того как заполнятся первое и второе места, на третье место можно поставить любой из оставшихся  элементов и т. д. По правилу умножения все *n-*места можно заполнить:способами. Таким образом, .***Пример***В пассажирском поезде 14 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 14 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?*Решение*Ясно, что в этом случае каждый способ отличается от других только порядком расположения элементов, а значит, число способов равно числу перестановокиз 14 элементов.$P\_{14}=14$! | ***Определение******Перестановками из n различных элементов*** *называются соединения (наборы), каждое(-ый) из которых содержит эти n-элементы, взятые в определенном порядке.****Замечание 1.*** *Перестановкой изn-элементов можно считать установленный в конечном множестве порядок.****Обозначение******Число всех пeрестановок из n-элементов обозначается Pn****(от фр. реrmutation–«перестановка»)*.*Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.* ***Выведем формулу для подсчета числа перестановок из n-элементов.******Вывод формулы*** *Пусть имеется n различных элементов, которые нужно распределить по n-местам. Выбор первого элемента можно осуществить n-способами (иначе на первое место можно поставить любой из n-элементов). После выбора первого элемента второй элемент можно выбрать (n – 1) способом (на второе место можно поставить любой из оставшихся (n – 1) элемент, третий элемент можно выбрать (n – 2) способами и т. д.Последний элемент – 1 способом.**По правилу произведения n-элементов можно выбрать n·(n – 1)·(n – 2)·(n – 3)·…·1 способом, то есть число способов равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n.* *Для такого произведения применяют специальное обозначение n! (читается «эн факториал»).* Например, 2! = 1 · 2, 3! = 1 · 2 · 3, 10! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 = 3 628 800.Таким образом, число перестановок из *n*-элементов равно ***Pn = n!******Пример***Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 3, 5, 7, 9 так, чтобы все цифры были различными?*Решение*Так как каждое число будет отличаться от другого только порядком расположения цифр, то количество чисел, составленных из указанных цифр, будет равно числу перестановок из 4 элементов. По формуле числа перестановок из *n*-элементов получим: P4= 4! = 1·2·3·4 = 24.***Иллюстрация (рис. 1)***На рисунке 1 показано, как получить перестановки из четырех различных элементов.На **первое место** можно поставить любой из четырех элементов (первый столбик),на **второе** – любой из оставшихся трех (от каждого выбранного элемента – три стрелки), на **третье** – любой их оставшихся двух (от каждого второго выбранного элемента – две стрелки), **на четвертое** – оставшийся один элемент от каждого третьего элемента – одна стрелка).*Всего комбинаций*будетP4= 4·3·2·1 = 24*Рис. 1*1234Места |

Анализ: отметим, что первый подход основан на использованиипонятий теориимножеств. Изучению комбинаторного понятия «перестановка» предшествует рассмотрение основных понятий теориимножеств. Для их первоначальногоусвоения нужна дополнительная система упражнений, а для применения в различных измененных условиях–включение этих понятийв систему интегрированных упражнений.

Второй подход не использует понятия теории множеств. Опора на личныйпрактический опыт, привычные для учащихсяпредставления о наборе, комбинации, порядке расположения объектов позволяют уменьшить количество новых терминов, связанных с ними новых понятий, рассматривать модели конструирования количества рассматриваемых наборов. Первый подход может быть использован на факультативных занятиях, второй – на уроках математики. Прослеживается связь между этими двумя подходами: во втором подходевзамечании1используются на интуитивном уровнепонятия множества, элемента множества. В первом подходе активно используетсяпонятие числа комбинаций и способа выбора, используемого во втором подходе.

Второй подход реализован в методическом пособии В. И. Берника,О. Н. Пирютко «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»**[1]**.

Структура пособия представлена следующими разделамипо каждой теме:

* краткаятеория с выводами основных формул и их иллюстрациями;
* примеры применения формул с решениями;
* контрольные вопросы, содержащие проверочные задания на знание теории и применения ее для решения задач с ответами;
* разноуровневые тесты (пять уровней) с ответамидля проверки и коррекции знаний;
* разноуровневые тесты (пять уровней) с ответамидля самостоятельной работы;
* дополнительные материалы для индивидуальной работы;
* разноуровневые тесты (пять уровней) с ответами для самостоятельной работы и дополнительные задачи;
* исторические сведения.

**2. Анализ методических приемов решения задач**

Комбинаторные задачи на применение правил умножения, сложения,вычислениячисла перестановок, размещений, сочетанийтребуют особых приемов, формирующих комбинаторное мышление учащихся.Комбинаторные задачи практически обеспечивают формированиеключевых образовательных компетенций: ***уметь выполнять анализ проблемы****(получать, организовывать и обрабатывать информацию, наблюдать,использовать эксперимент с помощью программных средств, искать примеры или контрпримеры,упрощатьили конкретизировать ситуацию;предложить гипотезу, подтвердить правильный подход или принять новый);* ***моделировать****(перевести на математическийязык реальную ситуацию);* ***представлять*** *(выбиратьрамки(цифровые, алгебраические, геометрические),подходящиедля работы с проблемой и представлениемматематического объекта, выполнять переключение из одного режима представления к другому);* ***вычислять***(*выполнять расчет вручную или с помощью инструментов (калькулятор, программное обеспечение), реализовыватьпростые алгоритмы, выполнять упражнение на интеллектуальныевычисления: организовать различные этапы сложногорасчета, выбирать преобразования, выполнять упрощения, проверять расчеты).*

Задачи так называемого первого уровня (в шкале оценок1–3 уровень) требуют умения выполнять два вида познавательных действий: классифицировать объекты по признакам, соответствующим определениям основных видов комбинаций,и конкретизироватьприменение правила в задаче. Обучение распознаванию***вида комбинации***целесообразно*через организацию алгоритмической деятельности.*

***Алгоритм выбора вида соединения***

Проиллюстрируем использование этого алгоритма, позволяющего учащимися отнестизадачу к определенному классуи реализовать математическую модель, соответствующую выбору.

**Задача 1**

Сколько различных четырехзначных чисел можносоставить из цифр 1, 5,8, 9 так, чтобы все цифры участвовали в записи?

Решение: всоответствии с алгоритмом, проверим, все ли элементы участвуют в наборе. Так как всего цифр четыре и все они используютсяв записичисла, топрименим формулу числа перестановок из *n*-элементов иполучим:

P4 = 4! = 1·2·3·4 = 24.

**Задача 2**

У филателиста 9 новыхмарок. Сколькими способами он может наклеитьчетыре изнихна 4пронумерованных места?

Решение: всоответствии с алгоритмом проверим, все ли элементы участвуют в наборе. Так как всего 9 марок, а выбрать нужно 4,то в наборе марокиспользуютсяне все элементы. Так как места расположения марокпронумерованы, то порядок расположения элементов в наборе имеет место. Следовательно, для ответа на вопрос задачи применяемформулу числаразмещений из девяти элементов по четыре:$A\_{9 }^{4}$ = 9· 8 ∙7∙6 = 3024.

Другой класскомбинаторных задач связан струдностямивыбора типа комбинации алгоритмически. Необходимы новые приемы, такие какприменение правила «решета», составлениематематическоймодели комбинации, позволяющей представить наборы, удовлетворяющие условию.Задачи такого типа достаточносложны,предлагаются для заданий 4–5 уровней.Проиллюстрируем указанныеметодические приемы решения комбинаторных задачна примерах.

**Задача 3**

Сколько различных нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 7, 8 так, чтобы все цифрыучаствовали в записи?

Решение: подсчитаем сначала количество всех чисел, которые можно составить из цифр 1, 3, 7, 8. Их числобудет равноP4 , а затем из общего числа вычтем количество четных чисел («просеиваем» ненужные), их будет столько, сколько различных перестановок можно сделать из трех нечетных цифр из имеющихся (цифра «8» помещается на последнее место).

P4 – P3 = 24 – 6= 18.

**Задача 4**

Сколькими различными способами можно разложить 12 различных конфет по трем коробкам?

Решение: используем прием составления математической модели комбинации, по которойможно увидеть ожидаемый результат.

Такой моделью будет набор из двенадцати компонентов, составленный из трех цифр (или другихсимволов, соответствующих коробкам).

Например,наборы 113332221133; 111111112222 вполне определенно объясняют, как располагаются конфеты в коробках. Первый наборпоказывает, что первую, вторую, девятую и десятую конфету поместили в первую коробку; шестую седьмую, восьмую – вовторую, остальные –в третью.Второй набор указывает, что первые восемь конфет – в первой коробке, последние четыре – во второй, а в третьей коробке нет конфет.Очевидно, что эти наборы иллюстрируют размещения из трех элементов с повторениями. Число таких наборов вычисляется по формуле$\overline{A\_{3}^{12}}$=$3^{12}$.

**3.Поурочное планирование изучения темы «Элементы комбинаторики и Бином Ньютона»с использованием пособия[1]**

На изучение этой темыв соответствии с программой отводится **10 часов**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 1** | ***Общие правила комбинаторики (Гл. 1п. 1)*** |
| Цель урока  | ***Сформировать представление*** о комбинаторике как разделе*математики*, в котором*изучаютсяспособы подсчета всевозможных комбинаций из некоторыхэлементов (объектов), составленных по определенным правилам.* ***Сформировать правила*** *суммы и произведения. Научить применять эти правила для решениядвух видов комбинаторных задач* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будут иметь представление* о комбинаторике;*знать правила произведения и суммы и уметь их применять для решения комбинаторных задач (в несильно измененных условиях)* |
| Содержание теории | *Рассмотреть правило произведения, обобщенное правило произведения, правило суммы, обобщенное правило суммы* |
| Содержание практики | *Разборпримеров применения правил из текста пособия.Решение заданий из раздела «Контрольные вопросы»: рассмотреть вопросы№ 1,2,3, 4, 6, 7, 9, 10* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела «Контрольные вопросы»№5,8,11, 12* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока №2** | ***Перестановки без повторений(Гл. 1п. 2)*** |
| Цель урока  | ***Сформировать представлениео перестановках,формуле подсчета числа перестановок без повторений.*** *Сформировать правило подсчета числа перестановок изn-элементов без повторений* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутзнать термини правильно применятьпонятие «перестановка», применять формулу для подсчета числа перестановок изn-элементовдля решения комбинаторных задач на применение этих правил (в несильно измененных условиях)* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестов первого раздела; можно предложить учащимся одно, дваили три задания в зависимости от уровня подготовленности учащихся* |
| Содержание теории | *Рассмотреть определение понятия перестановки,вывод формулы числа перестановок. Понятие факториала* |
| Содержание практики | *Разборпримеров применения правила подсчетачисла перестановокиз текста пособия.Решение заданий из раздела «Контрольные вопросы»:рассмотреть вопросы№ 1,2,4, 6, 7,9, 10,13* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела «Контрольные вопросы»№ 3,5,8,11,12,14* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 3** | ***Размещения без повторений (Гл. 1п.3)*** |
| Цель урока  | ***Сформировать представлениеоразмещении*** *изn-элементов по m,****формуле подсчета числа размещений без повторений.*** *Сформировать правило подсчета числа размещений изn-элементов по m без повторений* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутзнать термини правильно применятьпонятие «размещение», применять формулу для подсчета числа размещений из n-элементов по mдля решения комбинаторных задач на применение этих правил (в несильно измененных условиях)* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестоввторого раздела, можно предложить учащимсяодно, дваили три задания в зависимости от уровня подготовленности учащихся* |
| Содержание теории | *Рассмотреть определение понятия размещений,вывод формулы числа размещений из n-элементов по m.* |
| Содержание практики | *Разборпримеров применения правила подсчетачисла размещенийиз текста пособия.Решение заданий из раздела «Контрольные вопросы». Рассмотреть вопросы№ 1,2,4,6,7,9,10,12* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела «Контрольные вопросы»№ 3,5,8,11,13, 14* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 4** | ***Сочетаниябез повторений (Гл. 1п. 4)*** |
| Цель урока  | ***Сформировать представлениеосочетаниях,формуле подсчета числа сочетаний без повторений.*** *Сформировать правила подсчета числа сочетаний изn-элементов по m без повторений* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутзнать термини правильно применятьпонятие «сочетания», применять формулу для подсчета числа сочетаний из n-элементов по mдля решения комбинаторных задач на применение этих правил (в несильно измененных условиях)* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестовтретьего раздела, можно предложить учащимся одно, дваили три задания в зависимости от уровня подготовленности учащихся* |
| Содержание теории | *Рассмотреть определение понятия сочетаний,вывод формулы числа сочетаний из n-элементов по m, свойства числа сочетаний* |
| Содержание практики | *Разборпримеров применения правила подсчетачисла сочетаний и свойств сочетаний из текста пособия.Решение заданий из раздела «Контрольные вопросы». Рассмотреть вопросы№ 1,2,4, 6, 8,9, 10,12* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела «Контрольные вопросы»№1,3,5, 9,11,13,15* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 5** | ***Применение правил комбинаторики(Гл. 1п. 6)*** |
| Цель урока  | *Формирование навыков применения алгоритма для выбора вида комбинаций, правил подсчета числа перестановок, размещений, сочетаний без повторений, правил произведения и суммы* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутуметьприменять алгоритмвыбора вида комбинаций и применять его при решении задач в различных условиях* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестовчетвертого раздела; можно предложить учащимся дваили три задания каждого уровняв зависимости от подготовленности учащихся* |
| Содержание теории | *Рассмотреть алгоритм выбора вида комбинации, примеры его применения* |
| Содержание практики | *Разборпримеров применения алгоритма.Решение заданий из раздела№ 6. Решение комбинаторных задач. Можно выполнить задания:1 уровень №1,2уровень№3,3уровень № 1,4 уровень № 1, 5 уровень №1* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела«Дополнительные задачи»№1,4,7,9,11, 12* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 6** | ***Бином Ньютона(Гл. 2)*** |
| Цель урока  | *Сформировать навыки применения формулы для разложения бинома Ньютона: для представления степени в виде суммы и суммы одночленов в виде степени бинома* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будут* уметь*применять формулубинома Ньютона с использованием треугольника Паскаля и с помощьюформулы числа сочетаний и свойств1-5биномиальных коэффициентов* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестовраздела «Тесты для самостоятельной работы»;можно использовать одно, дваили три задания каждого уровняв зависимости от подготовленности учащихся* |
| Содержание теории | *Рассмотретьформулу бинома Ньютона, вывод формулы. Свойства 1-5* |
| Содержание практики | *Можно рассмотреть разборпримеров применения формулы и свойств 1-5 и контрольные вопросы1-3-5-9* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела«Контрольные вопросы» 2-4-6-11* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 7** | *Основные следствия из формулы биномаНьютона* |
| Цель урока  | *Сформировать навыки применения следствий из формулы для разложения бинома Ньютона* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будут* уметь*применять следствия 6-8 из формулыбинома Ньютона для вычисления коэффициентов, суммы коэффициентов, определения* к-*го члена бинома* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестов* |
| Содержание теории | *Рассмотреть следствия 6-8 формулы бинома Ньютона, вывод формулы. Свойства 6-8* |
| Содержание практики | *Можно рассмотреть разборпримеров применения свойств 6–8 и контрольные вопросы 7,12,13, 15* |
| *Домашнее задание* | *Свойства 1-8. Задания из раздела«Контрольные вопросы» 8,14* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 8** | *Основные следствия из формулы биномаНьютона* |
| Цель урока  | *Сформировать навыки применения следствий из формулы для разложения* n*-й степени бинома Ньютона* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутуметьприменять следствия из формулы бинома Ньютона для вычисления коэффициентов, суммы коэффициентов, определения* к*-го члена бинома* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием тестов:1или 2задания из разноуровневых тестов* |
| Содержание теории | *Рассмотреть примеры применения основных следствий из формулы биномаНьютона для решения задач повышенной сложности: задачиуровня 5*  |
| Содержание практики | *Рассмотреть задачи из тестов для самостоятельной работы для индивидуальной и групповой работы* |
| *Домашнее задание* | *Повторить свойства 1-8.Задания из раздела* *«Тесты для самостоятельной работы»* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 9** | *Обобщение и систематизация знаний по теме «Элементы комбинаторики и Бином Ньютона»* |
| Цель урока  | *Обобщить и систематизироватьосновные приемы решения задач по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутуметьприменять правила подсчета числа различных комбинаций. Решать задачи на применение формулы бинома Ньютонаи следствийиз нее* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестовдля самостоятельной работы* |
| Содержание теории | *В зависимости от уровня подготовленности классаможно рассмотреть формулы подсчета числа перестановок, размещений, сочетаний с повторениями. Второй вариант–решать интегрированныезадачи по изученному материалу* |
| Содержание практики | *Можно рассмотреть задачираздела «Дополнительный материал», задачи из «Контрольных вопросов»* |
| *Домашнее задание* | *Задания из раздела«Дополнительные задачи» или из раздела «Дополнительный материал»* |

|  |  |
| --- | --- |
| **Тема урока № 10** | *Обобщение и систематизация знаний по теме «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»* |
| Цель урока  | *Обобщить и систематизировать полученные знания. Решение задач на применение формулы бинома Ньютона* |
| Ожидаемые результаты | *Учащиеся будутуметьприменять правила подсчета числа различных комбинаций. Решать задачи на применение формулы бинома Ньютонаи следствийиз нее* |
| Диагностика | *Выполнить диагностическую работу с использованием разноуровневых тестовдля самостоятельной работы* |
| Содержание теории | *Разбор дополнительных приемов решения комбинаторных задач* |
| Содержание практики | *Решение задач из раздела«Тесты для самостоятельной работы»* |
| *Домашнее задание* | *Индивидуальное задание по материалам разделов «Дополнительный материал»,«Тесты для самостоятельной работы»* |

**ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ**

**1.Представление о комбинаторике как разделе математики**

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например: в агротехнике (размещение посевов на нескольких полях), в сфере общественного питания (составление меню), в химии (анализ возможных связей между химическими элементами), в экономике (анализ вариантов купли – продажи акций), в лингвистике (рассмотрение вариантов комбинаций букв), в биологии (расшифровка кодов ДНК), в астрологии (анализ расположения планет и созвездий), в географии (раскраска карт), в криптографии (разработка методов шифрования), в производстве (распределение нескольких видов работ между рабочими), в спортивных соревнованиях (расчет количества игр между участниками), в работе учебных заведений (составление расписаний) и т.д.

С аналогичными задачами, получившими название комбинаторных, люди столкнулись в глубокой древности. Несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов, в которых заданные числа располагали так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же. В Древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, изучали фигуры, которые можно составить из частей особым образом разрезанного квадрата. Так же комбинаторные задачи возникали в связи с такимииграми как шашки, шахматы, домино, карты, кости и другими (к примеру задача о расстановке восьми ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не оказался под боем или задача об обходе всех полей доски шахматным конем и т.д.)

В 17 веке возникает теория вероятностей и комбинаторика становится наукой. Ведь чтобы решать теоретико – вероятностные задачи, нужно уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. Этими задачи рассматривали ученые Дж.Кардано, Г.Галилей, Б.Паскаль, П.Ферма. Первой монографией по комбинаторике была опубликованная в 1666 году работа Г.Лейбница «Об искусстве комбинаторики», в которой и появился впервые этот термин. Большие достижения в этой области математики принадлежат Л.Эйлеру.

В решении комбинаторных задач часто используют графические методы, что дало начало теории графов – новому разделу математики.

Комбинаторные задачи физики, химии, биологии, экономики и других наук, которые не поддавались ранее решению из-за трудоемкости вычислений, стали успешно решаться на ЭВМ. В результате этого комбинаторные методы исследования все глубже проникают во многие разделы науки и техники. В 1970 -1980 гг. с помощью компьютера удалось решить задачу четырех красок: доказано, что любую карту можно раскрасить с помощью четырех красок так, что любые две соседние страны (страны, имеющие общую границу) будут иметь разные цвета.

Сегодня комбинаторика – это часть дискретной математики.

**2.Определения комбинаторики.**

**Комбинаторика** – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.

**Комбинаторика** – раздел математики, изучающий дискретные объекты и множества.

**Комбинаторика** – раздел математики, изучающий задачи, решением которых является перебор элементов некоторого конечного множества.

**Комбинаторика** – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

**3.Два основных правила комбинаторики.**

**1)Правило сложения (правило «или»)**: если элемент $A$ можно выбрать $n$ способами, а элемент $B$ можно выбрать $m$ способами, то выбрать $A или B$можно $m+n$ способами

**2)Правило умножения (правило «и»):**если элемент $A$ можно выбрать $n$ способами, и при любом выборе $A$ элемент $B$ можно выбрать $m$ способами, то пару $A и B$ можно выбрать $n∙m$ способами.

**4.Перестановки, размещения и сочетания без повторений.**

**Перестановками** называются такие выборки элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами.

Если перестановки производятся на множестве из $n$ элементов, их число определяется по формуле $P\_{n}=n∙\left(n-1\right)∙\left(n-2\right)∙…∙3∙2∙1=n!$

$n!$ – обозначение, которое используют для краткой записи произведения всех натуральных чисел от 1 до$n$ включительно и называют «$n$ – факториал».

Понятие факториал также распространяется на ноль: $0!=1$, так как считается, что пустое множество можно упорядочить единственным способом.

Вычислять факториалы больших чисел прямым умножением на калькуляторе очень долго, а очень больших чисел – и на компьютере не быстро. А как же справлялись с этим до создания компьютеров и калькуляторов? Еще в начале 18 века Дж. Стирлингом и независимо от него А. Муавром была получена формула для приближенного вычисления факториалов, которая тем точнее, чем больше число $n$. Сейчас эта формула называется **формулой Стирлинга:** $n!≈\sqrt{2πn}∙n^{n}∙e^{-n}$

**Размещениями** из $n$ элементов по$m$ (мест) называются такие выборки, которые имея по $m$ элементов, выбранных из числа данных $n$ элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из$n$ по $m$ обозначается $A\_{n}^{m}$ и определяется по формуле $A\_{n}^{m}=n∙\left(n-1\right)∙\left(n-2\right)∙…∙\left(n-m+1\right)=\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$

Число размещений из $n$ по $n$ равно числу перестановок из $n$ элементов, ведь используется для составления размещений все множество элементов, а значит они уже не могут отличаться друг от друга составом элементов, только порядком их расположения. А это и есть перестановки.

**Сочетания** – это комбинации, формируемые из $n$ различимых элементов по$m$ элементов в каждой и отличающиеся одна от другой только составом элементов.

Неупорядоченные выборки называются **сочетаниями** из $n$ элементов по $m$ и обозначаются $C\_{n}^{m}$. Число сочетаний определяется по формуле

$$ C\_{n}^{m}=\frac{n!}{\left(n-m\right)!∙m!}C\_{n}^{m}=\frac{A\_{n}^{m}}{P\_{m}}$$

Справедливы следующие **свойства числа сочетаний без повторений**:

$C\_{n}^{m}=C\_{n}^{n-m}$;$C\_{n}^{m}+C\_{n}^{m+1}=C\_{n+1}^{m+1}$

$$C\_{n}^{1}=nC\_{n}^{n}=1$$

**5.Бином Ньютона.**

Формулы сокращенного умножения являются частными случаями формулы бинома Ньютона.

Для любых действительных чисел $a$ и $b$, любого натурального $n$ имеет место формула

$$(a+b)^{n}=C\_{n}^{0}a^{n}b^{0}+C\_{n}^{1}a^{n-1}b+C\_{n}^{2}a^{n-2}b^{2}+C\_{n}^{3}a^{n-3}b^{3}+…+C\_{n}^{k}a^{n-k}b^{k}+…+C\_{n}^{n-2}a^{2}b^{n-2}+C\_{n}^{n-1}ab^{n-1}+C\_{n}^{n}a^{0}b^{n}$$

$T\_{k+1}=C\_{n}^{k}a^{n-k}b^{k}$ – формула для нахождения $k+1$ члена в разложении бинома.

Сумма биномиальных коэффициентов равна $2^{n}$: $C\_{n}^{0}+C\_{n}^{1}+…+C\_{n}^{n}=2^{n}$

**6.Задачи, решаемые с применением формулы бинома Ньютона.**

№1.Запишите в развернутом виде выражение:

А) $(x+2)^{5}$ Б) $(x-7)^{4}$ В) $(3x-2)^{5}$

 Г) $(2-x^{2})^{6}$ Д) $(2x+3)^{4}$ Е) $(1-3x^{3})^{6}$

№2.Вычислите коэффициент при указанной степени $x$ в выражении:

А) $x^{7}, (2x-5)^{11}$ Б) $x^{5}, (7-x)^{10}$ В) $x^{6}, (x^{2}-3)^{7}$ Г) $x^{6}, (4-x^{3})^{5}$

№3.Найдите пятый член разложения $(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})^{n}$, если коэффициент при третьем члене равен 66

№4.Найдите четвертый член разложения $(4+1,5\sqrt{x})^{n}$, если коэффициент при пятом члене равен 20376

№5.Найдите пятый член разложения $(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})^{n}$, если коэффициент при его третьем члене равен коэффициенту при восьмом

№6.Найдите отношение пятого и восьмого членов разложения $(2+\sqrt{3x})^{n}$, если отношение коэффициента при третьем члене к коэффициенту при седьмом равно $\frac{16}{9}$

№7.В разложении $(1+x)^{n}$ четвертый член равен 0,96. Найдите значения $x$ и $n$, если сумма биномиальных коэффициентов равна 1024

№8.Найдите наибольший биномиальный коэффициент разложения $(n+\frac{1}{n})^{n}$, если произведение четвертого от начала и четвертого от конца слагаемых равно 14400

№9.При каком значении $x$ четвертое слагаемое разложения $(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}})^{m}$ в 20 раз больше $m$, если биномиальный коэффициент четвертого слагаемого относится к биномиальному коэффициенту второго слагаемого как 5:1?

№10.Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^{n}$равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

№11.Найти третий член разложения $(\sqrt[3]{x}+\frac{3}{\sqrt{x}})^{n}$, если известно, что его пятый член не содержит $x$

№12.В разложении бинома $(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^{2}})^{10}$ найдите член, содержащий $x^{2}$

№13.Найдите шестой член разложения $(\sqrt[3]{x}+\frac{a}{x})^{10}$, если его третий член в четыре раза больше, чем пятый член разложения $(\frac{2}{\sqrt{x}}+x)^{7}$

**7.Простые комбинаторные задачи.**

№1.(Р.) В первенстве Беларуси по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены? (4080)

№2.(П.) В танцевальном кружке 6 парней и 6 девушек. Сколькими способами их можно разбить на пары парень – девушка? (720)

№3.(П.) Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики? (24)

№4.(С.) Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из имеющихся в наличии внешне неразличимых 30-ти книг? (155117520)

№5.(Р.+П.+П.У.) Сколькими способами можно расставить 30 книг на двух полках, если на каждой из них помещается только по 15 томов? (30!)

№6.Сколькими способами из полной колоды карт (52 карты) можно выбрать

А) 4 карты разных мастей и достоинств? (17610)

Б) 4 карты разных мастей, среди которых ровно 2 туза? (864)

В) 3 карты разных мастей, среди которых не более одного туза? (8640)

№7.(С.) В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать? (36)

№8.(П.У.) В меню столовой предложено на выбор 2 первых блюда, 6 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обеда, состоящего из первого, второго и третьего блюда, можно составить? (48)

№9.(С.+П.У.) В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими способами можно выбрать покупку из двух разных блокнотов и одной ручки? (84)

№10.(Р.+П.С.) Сколько четных трехзначных чисел можно составить из цифр 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа не могут повторяться) (12)

№11.(С.+П.С.) Сколько различных звукосочетаний можно взять на 10 выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трех до десяти звуков? (968)

№12.(Р.) Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр? (42)

№13.(С.+П.У.) Восемь авторов должны написать книгу из 16 глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги? ($\frac{16!}{576})$

№14.(С.+П.С.) Из семи плотников и пяти столяров необходимо составить бригаду из четырех человек, в которой должен быть по крайней мере один столяр. Сколькими способами это можно сделать? (460)

№15.Решить уравнение:

А) $A\_{x}^{3}=63\left(x-1\right)$ (9)

Б) $A\_{x}^{4}+2A\_{x-1}^{3}=50(x-1)(x-2)$ (8)

В) $C\_{x}^{3}+4C\_{x-1}^{4}=14(x-1)(x-2)$ (12)

Г) $A\_{x^{2}}^{2}:A\_{x}^{2}=56 $Д) $\frac{P\_{x+2}}{A\_{x}^{5}∙P\_{x-5}}=720$Е) $\frac{C\_{x}^{2}+C\_{x-1}^{2}}{C\_{x}^{3}}=\frac{54}{80}$Ж) $\frac{A\_{x+1}^{y+1}∙P\_{x-y}}{P\_{x-1}}=72$

№16.Решить систему уравнений:

А) $\left\{\begin{array}{c}A\_{y}^{x}:P\_{x-1}+C\_{y}^{y-x}=126\\P\_{x+1}=720\end{array}\right.$Б) $\left\{\begin{array}{c}A\_{x}^{y}:A\_{x}^{y-1}=12\\C\_{x}^{y-1}:C\_{x}^{y}=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

В) $\left\{\begin{array}{c}y^{2}∙C\_{x}^{y}:C\_{x}^{y-2}=56\\\frac{A\_{x}^{y}∙A\_{x}^{y-2}}{(A\_{x}^{y-1})^{2}}=\frac{7}{8}\end{array}\right.$

№17.Найти область определения и множество значений функции:

А) $f\left(x\right)=A\_{9-x}^{x-4}$ Б) $f\left(x\right)=A\_{36-x^{2}}^{x-3}$ В) $f\left(x\right)=C\_{3x-4}^{5x-10}$

№18.При каких значениях $x$ и $y$возможно равенство $C\_{y}^{x}:C\_{y+2}^{x}:A\_{y}^{x}=1:3:24$?

№19.Докажите тождество:

А) $\frac{A\_{n}^{6}+A\_{n}^{5}}{A\_{n}^{4}}=(n-4)^{2}$Б) $C\_{n}^{m+1}+C\_{n}^{m-1}+2C\_{n}^{m}=C\_{n+2}^{m+1}$

Комбинаторно-логическая игра «Быки и коровы»